

Equations différentielles.① Définition :

f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} . On pose : $y = f(x)$

on a : $y' = f'(x)$ et $y'' = f''(x)$.

Dans ce cours les nombres a et b sont toujours des réels.

Déf : L'équation :

$$(E) : y'' + ay' + by = g(x)$$

est une équation différentielle de second degré

y est la fonction inconnue.

Expl : 1) $y'' + 3y' - y = 0$

2) $y'' + y = x^2 + 1$

3) $y' - y = \sin(x)$

② Equation de type : $y' + ay = 0$

Les solutions de l'éq $y' + ay = 0$

sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda e^{-ax} \quad (\text{avec : } \lambda \in \mathbb{R})$$

Ex. 1 Résoudre les éq-diff :

1) $y' + 3y = 0$

2) $y' - \sqrt{2}y = 0$

3) $y' + \frac{5}{4}y = 0$

③ Eq de type : $y'' + ay' + by = 0$

On considère l'éq-diff :

$$(E) : y'' + ay' + by = 0$$

et son équation caractéristique :

$$(*) \quad r^2 + ar + b = 0$$

1^{er} cas si $(*)$ admet deux solutions

réels r_1 et r_2 alors :

les solutions de (E) sont les

fonctions : $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$

avec : $(\lambda; \mu \in \mathbb{R})$

$\lambda = \text{"lambda"}$ et $\mu = \text{"mu"}$

2^{ème} cas si $(*)$ admet une seule

solution réel : r alors :

les solutions de l'éq-diff (E) sont

les fonctions : $x \mapsto (\lambda + \mu x) e^{rx}$

avec $\lambda; \mu \in \mathbb{R}$.

3^{ème} cas : si $(*)$ admet deux

solutions complexes z_1 et z_2

on a : $z_1 = a - bi$; $z_2 = a + bi$

les solutions de (E) sont les

fonctions :

$$x \mapsto e^{ax} (\lambda \cos(bx) + \mu \sin(bx))$$

(avec : $\lambda; \mu \in \mathbb{R}$)

Ex: 2 Résoudre les éq-diff :

1°/ $y'' + 3y' + 2y = 0$

2°/ $y'' - 2y' + y = 0$

3°/ $y'' - 2y' + 5y = 0$

Exercices de révisions :

EX.1 Résoudre dans \mathbb{R} les éq :

① $e^{3x} - 1 = 0$ ② $e^{5x-1} - e^{x^2+5} = 0$
③ $\ln(e^x - 1) = 1$ ④ $\frac{e^x - e^{-x}}{2e^x + e^{-x}} = \frac{1}{3}$

EX.2 Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations :

① $3 - e^{-x} > 0$ ② $\frac{e^x - 3}{e^x - 1} < 0$
③ $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} > 0$
④ $e^{-2x} + 3e^{-x} + 2 > 0$

EX.3 ① Trouver le domaine de déf des fcts suivantes :

①^o $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2 - 1}$; ②^o $f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x - 2}$

② Calculer $f'(x)$ dans chaque cas :

1^o $f(x) = xe^{\sqrt{x}}$. 2^o $f(x) = e^{\sin(3x)}$

3^o $f(x) = \ln(x^2 + 1)e^{\frac{x^2-1}{x}} + \frac{1}{x}$

EX.4 Calculer les limites :

1^o $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ 2^o $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (x - e^{-x})$

3^o $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 2x^2 - x)$ 4^o $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{2x}$

EX.5 f définie sur $[-3; 0]$ par :

$$f(x) = 1 - xe^x$$

1^o Donner le tableau de variation de la fonction f sur $[-3; 0]$

2^o Construire la courbe (\mathcal{C}_f)

• Devoir maison : n°1 2^{ème} semestre

à rendre le vendredi 06/03/2020

EX.1 $f(x) = e^x - 2x$

1^o Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$ sachant que : $e \simeq 2,7$ et $e^2 \simeq 7,4$

2^o Calculer $f'(x)$ et donner le tableau de variation de f .

3^o Donner l'équation des deux tangentes à (\mathcal{C}_f) aux points d'abscisses : $x = \ln(2)$ et $x = 0$

4^o Construire (\mathcal{C}_f)

EX.2 Résoudre les équations différentielles :

1^o $y' + 4y = 0$

2^o $y'' + 4y' + 4 = 0$

3^o $y'' + y' + y = 0$

EX.3

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$$

2) On considère les trois points : A, B et C avec : $z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \text{ et } z_C = \overline{z_B}$$

2-a) écrire z_A et z_B sous forme trigonométrique.

2-b) Montrer que : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

3) Vérifier que : $\frac{z_B}{z_C} = e^{i\pi/3}$

4) Déterminer la nature du triangle OBC.